

3.2 マックスウェルの相反定理(p.30)

任意の点*i*に外力 W_i が作用

W_i の方向の変位を λ_i

変位が小さいとき

変形と外力がつりあう状態で外力が増加するときの外力が物体に与える仕事は

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i \lambda_i \quad (3.9)$$

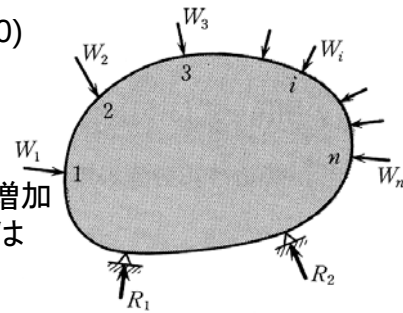


図 3.3

変位が小さいとき各作用点の変位は

$$\lambda_1 = c_{11}W_1 + c_{12}W_2 + \dots + c_{1n}W_n$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}W_j \quad (3.10) \quad c_{ij}: \text{影響係数}$$

(3.9)に(3.10)を代入

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i \left(\sum_{j=1}^n c_{ij}W_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}W_iW_j \quad (3.11)$$

マックスウェルの相反定理(外力が2つの場合の説明)

変形と外力がつりあう状態で外力が増加する場合

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i \lambda_i \quad (3.9) \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}W_j \quad (3.10)$$

1) 外力が W_1, W_2 の順に作用する場合を考える

Step 1: W_1 が $0 \rightarrow W_1$, $W_2=0$

$$\frac{1}{2}W_1\lambda_1 = \frac{1}{2}W_1(c_{11}W_1)$$

$$\begin{array}{ll} \times W_1 & \times W_2 \\ \lambda_1 = 0_1 & \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = c_{11}W_1 & \lambda_2 = c_{21}W_1 \\ \lambda_1 = c_{11}W_1 + c_{12}W_2 & \lambda_2 = c_{21}W_1 + c_{22}W_2 \end{array}$$

Step 2: $W_1=W_1$, W_2 が $0 \rightarrow W_2$

$$W_1(c_{12}W_2) + \frac{1}{2}W_2(c_{22}W_2)$$

λ_1 のうちの W_2 成分
 W_1 成分は一定で仕事をしない

λ_2 のうちの W_2 成分
 W_1 成分は一定で仕事をしない

$$U = \frac{1}{2}W_1(c_{11}W_1) + W_1(c_{12}W_2) + \frac{1}{2}W_2(c_{22}W_2)$$

2) 外力が W_2, W_1 の順に作用する場合を考える

Step 1: W_2 が $0 \rightarrow W_2, W_1=0$

$$\frac{1}{2}W_2\lambda_2 = \frac{1}{2}W_2(c_{22}W_2) \quad \leftarrow \begin{array}{cc} \lambda_1 = 0_1 & \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = c_{12}W_2 & \lambda_2 = c_{22}W_2 \end{array}$$

Step 2: $W_2=W_2, W_1$ が $0 \rightarrow W_1$

$$\lambda_1 = c_{11}W_1 + c_{12}W_2 \quad \lambda_2 = c_{21}W_1 + c_{22}W_2$$

$$\frac{1}{2}W_1(c_{11}W_1) + W_2(c_{21}W_1)$$

λ_1 のうちの W_1 成分
 W_2 成分は一定で仕事をしない

λ_2 のうちの W_1 成分
 W_2 成分は一定で仕事をしない

$$U' = \frac{1}{2}W_2(c_{22}W_2) + \frac{1}{2}W_1(c_{11}W_1) + W_2(c_{21}W_1)$$

$$U = \frac{1}{2}W_1(c_{11}W_1) + W_1(c_{12}W_2) + \frac{1}{2}W_2(c_{22}W_2)$$

$$U = U'$$

$$W_1(c_{12}W_2) = W_2(c_{21}W_1)$$

$$\therefore c_{12} = c_{21} \quad (3.16)$$

マックスウェルの相反定理

3. 4 カスチリアーノの定理

長さ L , 断面積 A の棒の一端を固定, 自由端に荷重 W

$$\text{ひずみエネルギー} \quad U = \frac{1}{2}W\lambda = \frac{1}{2}W \frac{WL}{EA} = \frac{W^2L}{2EA}$$

$$\frac{dU}{dW} = \frac{WL}{EA} = \lambda$$

ひずみエネルギーを荷重で微分 $\Rightarrow$ 変位
カスチリアーノの定理の簡単な場合